数　学　Ⅱ

(全　問　必　答)

第1問　(配点　30)

〔1〕　連立方程式

$$\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta = \dfrac{4}{15} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \cos\alpha\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考える。ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であり，$\alpha < \beta$ かつ

$$|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta| \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

とする。このとき，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求めよう。

2倍角の公式を用いると，①から

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$$

が得られる。また，②から，$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \dfrac{\boxed{オ}}{15}$ である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

したがって，条件 ③ を用いると

$$\cos^2\alpha = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \qquad \cos^2\beta = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。よって，② と条件 $0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\alpha < \beta$ から

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}, \qquad \cos\beta = \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

〔2〕 座標平面上に点A$\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$をとり，関数$y = \log_2 x$のグラフ上に2点B$(p,\ \log_2 p)$，C$(q,\ \log_2 q)$をとる。線分ABを1：2に内分する点がCであるとき，p，qの値を求めよう。

真数の条件により，$p >$ $\boxed{\text{タ}}$，$q >$ $\boxed{\text{タ}}$ である。ただし，対数$\log_a b$に対し，aを底といい，bを真数という。

線分ABを1：2に内分する点の座標は，pを用いて

$$\left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p,\quad \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\log_2 p + \boxed{\text{ナ}}\right)$$

と表される。これがCの座標と一致するので

$$\begin{cases} \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p = q & \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\log_2 p + \boxed{\text{ナ}} = \log_2 q & \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

が成り立つ。

（数学Ⅱ第1問は次ページに続く。）

⑤は

$$p = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} q^{\boxed{\text{ネ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

と変形できる。④と⑥を連立させた方程式を解いて，$p > \boxed{\text{タ}}$，$q > \boxed{\text{タ}}$ に注意すると

$$p = \boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}, \quad q = \boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}$$

である。

また，Cの y 座標 $\log_2\left(\boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}\right)$ の値を，小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めると，$\boxed{\text{ヘ}}$ である。$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～ⓑのうちから一つ選べ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

⓪ 0.3　① 0.6　② 0.9　③ 1.3　④ 1.6　⑤ 1.9
⑥ 2.3　⑦ 2.6　⑧ 2.9　⑨ 3.3　ⓐ 3.6　ⓑ 3.9

数学Ⅱ

第2問 （配点　30）

Oを原点とする座標平面上の放物線 $y = x^2 + 1$ を C とし，点 $(a,\ 2a)$ をPとする。

(1)　点Pを通り，放物線 C に接する直線の方程式を求めよう。

C 上の点 $(t,\ t^2 + 1)$ における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}\,tx - t^2 + \boxed{\text{イ}}$$

である。この直線がPを通るとすると，t は方程式

$$t^2 - \boxed{\text{ウ}}\,at + \boxed{\text{エ}}\,a - \boxed{\text{オ}} = 0$$

を満たすから，$t = \boxed{\text{カ}}\,a - \boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。よって，$a \neq \boxed{\text{ケ}}$ のとき，Pを通る C の接線は2本あり，それらの方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{コ}}\,a - \boxed{\text{サ}}\right)x - \boxed{\text{シ}}\,a^2 + \boxed{\text{ス}}\,a \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

と

$$y = \boxed{\text{セ}}\,x$$

である。

(2)　(1)の方程式①で表される直線を ℓ とする。ℓ と y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ r)$ とすると，$r = -\boxed{\text{シ}}\,a^2 + \boxed{\text{ス}}\,a$ である。$r > 0$ となるのは，$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のときであり，このとき，三角形OPRの面積 S は

$$S = \boxed{\text{チ}}\left(a^{\boxed{\text{ツ}}} - a^{\boxed{\text{テ}}}\right)$$

となる。

（数学Ⅱ第2問は次ページに続く。）

$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，S の増減を調べると，S は $a = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ をとることがわかる。

(3) $\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，放物線 C と(2)の直線 ℓ および2直線 $x = 0$，$x = a$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}a^3 - \boxed{\text{ヒ}}\,a^2 + \boxed{\text{フ}}$$

である。$\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leqq a < \boxed{\text{タ}}$ の範囲において，T は $\boxed{\text{ヘ}}$。$\boxed{\text{ヘ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 減少する

① 極小値をとるが，極大値はとらない

② 増加する

③ 極大値をとるが，極小値はとらない

④ 一定である

⑤ 極小値と極大値の両方をとる

第3問 （配点　20）

座標平面上に2点A(0，3)，B(8，9)をとる。

(1)　2点A，Bを通る直線の方程式は $y=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x+\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2)　線分ABの長さは $\boxed{\text{エオ}}$ である。

(3)　線分ABを直径とする円 C の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{カ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{キ}}\right)^2=\boxed{\text{クケ}}$$

である。また，Aにおける C の接線の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}x+\boxed{\text{ス}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。

（数学Ⅱ第3問は次ページに続く。）

⑷ 三角形ABPの面積が20である点Pの軌跡は，2直線

$$y = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}x + \boxed{\text{タ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と

$$y = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}x - \boxed{\text{チ}}$$

である。

⑸ 直線①と直線②の交点のx座標は$\dfrac{\boxed{\text{ツテト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$であり，円$C$と直線②の交点の$x$座標は$\boxed{\text{ニ}}$と$\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$である。

⑹ 三角形ABPの面積が20であり，かつ三角形ABPが直角三角形であるような点Pは全部で$\boxed{\text{ハ}}$個ある。

第4問 (配点　20)

(1)　4次式$P(x)$は，x^4の係数が1で，x^2-2x+3で割り切れるとする。また，$P(x)$は$P(1)=12$，$P(2)=15$を満たすとする。

$P(x)$をx^2-2x+3で割った商を$S(x)=x^2+mx+n$　(m，nは実数)とおくと，$S(1)=\boxed{\text{ア}}$，$S(2)=\boxed{\text{イ}}$であるから，$m=\boxed{\text{ウエ}}$，$n=\boxed{\text{オ}}$である。方程式$S(x)=0$の解は

$$\boxed{\text{カ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,i$$

である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(2)　2次式 $Q(x) = x^2 + kx + \ell$ (k, ℓ は実数)を考える。c を正の実数として，$\alpha = c + \dfrac{1}{c}i$ とする。方程式 $Q(x) = 0$ は複素数 α を解にもつとする。

$Q(x)$ の x に α を代入すると

$$Q(\alpha) = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{c^2} + c^2 + \boxed{\text{コ}}\,k + \ell + \left(\boxed{\text{サ}} + \frac{k}{c}\right)i$$

となる。k, ℓ を c を用いて表すと，$k = \boxed{\text{シスセ}}$，$\ell = \dfrac{c^{\boxed{\text{ソ}}} + \boxed{\text{タ}}}{c^2}$ である。

二項定理から，α の4乗は $\alpha^4 = \boxed{\text{チ}} + \boxed{\text{ツ}}\,i$ となる。$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～ⓑのうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $3\left(c^2 + \dfrac{1}{c^2}\right)$　① $4\left(c^2 + \dfrac{1}{c^2}\right)$　② $6\left(c^2 + \dfrac{1}{c^2}\right)$

③ $3\left(c^2 - \dfrac{1}{c^2}\right)$　④ $4\left(c^2 - \dfrac{1}{c^2}\right)$　⑤ $6\left(c^2 - \dfrac{1}{c^2}\right)$

⑥ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} + 4\right)$　⑦ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} + 6\right)$　⑧ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} + 10\right)$

⑨ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} - 4\right)$　ⓐ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} - 6\right)$　ⓑ $\left(c^4 + \dfrac{1}{c^4} - 10\right)$

相加平均と相乗平均の関係から，c が $c > 0$ の範囲を動くとき，α^4 の実部 $\boxed{\text{チ}}$ は $c = \boxed{\text{テ}}$ で最小値 $\boxed{\text{トナ}}$ をとり，そのとき，$k = \boxed{\text{ニヌ}}$，$\ell = \boxed{\text{ネ}}$ である。

Q

数　学　Ⅱ　(100点満点)

問題番号(配点)	解答記号	正解	配点
第1問 (30)	$\dfrac{\text{アイ}}{\text{ウエ}}$	$\dfrac{17}{15}$	3
	オ	4	2
	$\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}$	$\dfrac{4}{5}$	3
	$\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$	$\dfrac{1}{3}$	3
	$\dfrac{\text{コ}\sqrt{\text{サ}}}{\text{シ}}$	$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$	2
	$\dfrac{\text{ス}\sqrt{\text{セ}}}{\text{ソ}}$	$\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$	2
	タ	0	2
	$\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}$	$\dfrac{1}{3}$	2
	$\dfrac{\text{テ}}{\text{ト}}\log_2 p + \text{ナ}$	$\dfrac{1}{3}\log_2 p + 1$	2
	$\dfrac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}q^{\text{ネ}}$	$\dfrac{1}{8}q^3$	3
	$\text{ノ}\sqrt{\text{ハ}}$	$6\sqrt{6}$	2
	$\text{ヒ}\sqrt{\text{フ}}$	$2\sqrt{6}$	2
	ヘ	6	2
第2問 (30)	ア	2	2
	イ	1	1
	$t^2 - \text{ウ}\,at + \text{エ}\,a - \text{オ}$	$t^2 - 2at + 2a - 1$	2
	$\text{カ}\,a - \text{キ}$	$2a - 1$	1
	ク	1	1
	ケ	1	1
	$(\text{コ}a - \text{サ})x - \text{シ}a^2 + \text{ス}a$	$(4a - 2)x - 4a^2 + 4a$	2
	セ	2	2
	$\text{ソ} < a < \text{タ}$	$0 < a < 1$	2
	$\text{チ}\left(a^{\text{ツ}} - a^{\text{テ}}\right)$	$2\left(a^2 - a^3\right)$	3
	$\dfrac{\text{ト}}{\text{ナ}}$	$\dfrac{2}{3}$	3
(第2問)	$\dfrac{\text{ニ}}{\text{ヌネ}}$	$\dfrac{8}{27}$	3
	$\dfrac{\text{ノ}}{\text{ハ}}a^3 - \text{ヒ}\,a^2$	$\dfrac{7}{3}a^3 - 3a^2$	3
	フ	a	1
	ヘ	2	3
第3問 (20)	$\dfrac{\text{ア}}{\text{イ}}x + \text{ウ}$	$\dfrac{3}{4}x + 3$	2
	エオ	10	2
	$(x - \text{カ})^2 + (y - \text{キ})^2 = \text{クケ}$	$(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$	2
	$\dfrac{\text{コサ}}{\text{シ}}x + \text{ス}$	$\dfrac{-4}{3}x + 3$	3
	$\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}$	$\dfrac{3}{4}$	2
	タ	8	1
	チ	2	1
	$\dfrac{\text{ツテト}}{\text{ナ}}$	$\dfrac{-12}{5}$	2
	ニ，$\dfrac{\text{ヌネ}}{\text{ノ}}$	4，$\dfrac{-4}{5}$	2
	ハ	8	3
第4問 (20)	ア	6	1
	イ	5	1
	ウエ，オ	−4，9	2
	$\text{カ} \pm \sqrt{\text{キ}}\,i$	$2 \pm \sqrt{5}\,i$	2
	クケ，コ	−1，c	2
	サ	2	1
	シスセ	−2c	1
	$c^{\text{ソ}} + \text{タ}$	$c^4 + 1$	2
	チ	a	2
	ツ	4	2
	テ	1	1
	トナ	−4	1
	ニヌ	−2	1
	ネ	2	1